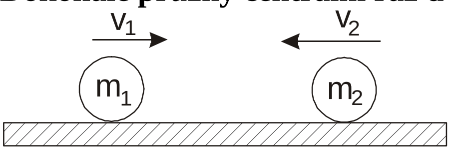
1.5.9 Zákon zachování mechanické energie III

Předpoklady: 1508

Dokonale pružný centrální ráz dvou koulí



Speciální typ srážky, situace známá z kulečníku:

- dokonale pružný: při srážce se neztrácí energie,
- centrální ráz: srazí se dvě stejně velké koule tak, že bod dotyku leží na spojnici těžišť (koule se do sebe trefí).

Rychlosti po srážce se zřejmě změní $\Rightarrow$ potřebujeme další písmena, nejčastější variantou se použití dvojitého w.

Platí:

- Zákon zachování hybnosti (při srážce hraje roli pouze vzájemné působení koulí): $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$.
- Zákon zachování energie (ráz je dokonale pružný): $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2$.

Chceme určit rychlosti koulí po srážce (dvě hodnoty) $\Rightarrow$ potřebujeme soustavu dvou rovnic (už ji máme) $\Rightarrow$ zdánlivě pouze matematický problém. Ale druhá rovnice obsahuje druhé mocniny $\Rightarrow$ zkusíme ji zjednodušit.

Upravíme si druhou rovnici:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 w_1^2 = m_2 w_2^2 - m_2 v_2^2$$

$$m_1 \left(v_1^2 - w_1^2 \right) = m_2 \left(w_2^2 - v_2^2 \right)$$

$$m_1 \left(v_1 - w_1 \right)\left(v_1 + w_1 \right) = m_2 \left(w_2 - v_2 \right)\left(w_2 + v_2 \right)$$

Podobně si upravíme i první rovnici:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$$

$$m_1 v_1 - m_1 w_1 = m_2 w_2 - m_2 v_2$$

$$m_1 \left(v_1 - w_1 \right) = m_2 \left(w_2 - v_2 \right)$$

Nyní možné druhou rovnici vydělit první.

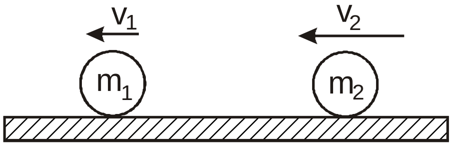
$$\frac{m_1 \left(v_1 - w_1 \right)\left(v_1 + w_1 \right) = m_2 \left(w_2 - v_2 \right)\left(w_2 + v_2 \right)}{m_1 \left(v_1 - w_1 \right) = m_2 \left(w_2 - v_2 \right)} \Rightarrow \left(v_1 + w_1 \right) = \left(w_2 + v_2 \right)$$

$$\left(v_1 + w_1 \right) = \left(w_2 + v_2 \right) \Rightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1$$

Dokonale pružný centrální ráz je popsán dvojicí rovnic: $\begin{matrix} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \end{matrix}$.

Pedagogická poznámka: Odvození většinou pouze promítnu a krátce okomentuji. Nemá smysl, aby si studenti odvození opisovali.

Př. 1: Kuličky se pohybují směrem způsobem naznačeným na obrázku. Urči jejich rychlosti po srážce. $m_1 = 0,5\,\text{kg}$, $m_2 = 1\,\text{kg}$, $v_1 = 5\,\text{m/s}$, $v_2 = 10\,\text{m/s}$.



$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \Rightarrow 0,5\cdot 5 + 1\cdot 10 = 0,5w_1 + w_2$

$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \Rightarrow 5 - 10 = w_2 - w_1$

$12,5 = 0,5w_1 + w_2 \quad /\cdot 2$

$-5 = w_2 - w_1 \Rightarrow w_2 = w_1 - 5$

Dosadíme do první rovnice: $25 = w_1 + 2w_2 = w_1 + 2(w_1 - 5)$.

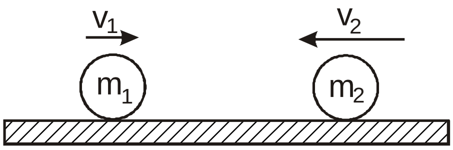
$25 = 3w_1 - 10$

$35 = 3w_1 \Rightarrow w_1 = \frac{35}{3}\,\text{m/s} = 11,7\,\text{m/s}$

$w_2 = w_1 - 5 = \frac{35}{3} - 5 = \frac{20}{3}\,\text{m/s} = 6,7\,\text{m/s}$

Lehčí kulička zrychlí, těžší zpomalí.

Př. 2: Kuličky se pohybují proti sobě způsobem naznačeným na obrázku. Urči jejich rychlosti po srážce. $m_1 = 0,5\,\text{kg}$, $m_2 = 1\,\text{kg}$, $v_1 = 5\,\text{m/s}$, $v_2 = 10\,\text{m/s}$.



$m_1 = 0,5\,\text{kg}$, $m_2 = 1\,\text{kg}$, $v_1 = 5\,\text{m/s}$, $v_2 = -10\,\text{m/s}$ (koule se pohybuje opačným směrem)

$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \Rightarrow 0,5\cdot 5 + 1\cdot(-10) = 0,5w_1 + w_2$

$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \Rightarrow 5 - (-10) = w_2 - w_1$

$-7,5 = 0,5w_1 + w_2$

$15 = w_2 - w_1 \Rightarrow w_2 = 15 + w_1$

Dosadíme do první rovnice: $-7,5 = 0,5w_1 + (15 + w_1)$.

$-22,5 = 1,5w_1 \Rightarrow w_1 = -15\,\text{m/s}$

$w_2 = 15 + w_1 = 15 + (-15) = 0\,\text{m/s}$

Lehčí kulička se odrazí zpátky, těžší se zastaví.

Pedagogická poznámka: Dopředu žáky nevaruji, že si mají dát pozor na znaménko.

Př. 3: Na kulečníkovém stole stojí koule o hmotnosti *m*, do které narazí centrálně stejná koule o hmotnosti *m* rychlostí *v*. Urči stav po proběhnutí rázu, pokud byl dokonale pružný.

Situaci si trochu zpřehledníme tím, že změníme indexování. Místo indexů 1 a 2 použijeme *s* (stojící) a *p* (pohybující se).

$m_1 = m$, $m_2 = m$, $v_s = 0$, $v_p = v$

$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \Rightarrow m \cdot 0 + m \cdot v_p = mw_s + mw_p \quad /:m$

$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \Rightarrow 0 - v_p = w_p - w_s$

$v_p = w_s + w_p$

$-v_p = -w_s + w_p$

Rovnice sečteme: $0 = 2w_p \Rightarrow w_p = 0 \Rightarrow$ Koule, která se pohybovala, se zastaví.

Dosadíme $w_p = 0$ do první rovnice: $v_p = w_s + w_p = w_s + 0 \Rightarrow w_s = v_p \Rightarrow$ Koule, která stála, se rozjede rychlostí *v*, koule, která se kutálela, se zastaví.

Výsledek odpovídá zkušenostem z kulečníku, kde se mnohé situace spočtenému příkladu blíží. Například tento ukázkový úder (40 sekunda).

Pedagogická poznámka: Následující příklady jsou pro lepší studenty. Většina studentů má dost práce s předchozími, kde se dosazuje.

Př. 4: Odvoď ze soustavy pro dokonale pružný centrální ráz $\begin{matrix} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \\ v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \end{matrix}$ vzorec pro výslednou rychlost w_1. Najdi pomocí vzorce pro rychlost w_1 co nejrychleji vzorec pro rychlost w_2.

$w_2 = v_1 - v_2 + w_1$

Dosadíme do první rovnice: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2(v_1 - v_2 + w_1)$.

$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2v_1 - m_2v_2 + m_2w_1$

$m_1w_1 + m_2w_1 = m_1v_1 + m_2v_2 - m_2v_1 + m_2v_2$

$$w_1 = \frac{2m_2v_2 + m_1v_1 - m_2v_1}{m_1 + m_2}$$

Rychlost druhé kuličky bychom mohli spočítat podobně. Ušetříme si však práci následující úvahou. Obě kuličky jsou ve zcela rovnocenné situaci. Kdybychom prohodili jejich označení, musela by rychlost první kuličky (teď ale značené jako druhá) vyjít stejně. Opíšeme tedy vzorec pro první kuličku a prohodíme všechny indexy:

$$w_1 = \frac{2m_2v_2 + m_1v_1 - m_2v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow w_2 = \frac{2m_1v_1 + m_2v_2 - m_1v_2}{m_1 + m_2}$$

Př. 5: Vozíček horské dráhy vjíždí do svislé kruhové zatáčky o poloměru 12 m. Jakou rychlostí se musí pohybovat v nejvyšším bodě zatáčky (návštěvníci jsou hlavou vzhůru), aby nespadl? Jakou rychlostí se musí pohybovat na jejím začátku v nejnižším bodě (návštěvníci sedí normálně)? Z jaké výšky se vozík musel do zatáčky rozjet? Tření a odpor vzduchu zanedbej.

$r = 12\,\mathrm{m}$, $v_h = ?$, $v_d = ?$ $h_0 = ?$

Rychlost v_h v nejvyšším bodě

Na vozík působí dvě síly:
gravitace kolmo dolů

tlaková síla kolejí kolmo dolů
Výslednice (součet obou sil) tvoří dostředivou sílu, při nižší rychlosti je třeba menší dostředivá síla $\Rightarrow$ potřebná dostředivá síla se musí rovnat alespoň gravitační síla (ta se nemění a pokud bude příliš velká stáhne vozík z kolejí).

$F_g = F_d$

$mg = m\frac{v^2}{r}$

$v^2 = gr \ \Rightarrow \ v_h = \sqrt{gr} = \sqrt{10 \cdot 12}\ \text{m/s} = 11\,\text{m/s}$

Rychlost v_h v nejnižším bodě

Během jízdy obloukem se vozík dostává výš $\Rightarrow$ zmenšuje se jeho kinetická energie a zvětšuje se jeho energie potenciální, odporové síly zanedbáváme $\Rightarrow$ platí zákon zachování energie.

$E_{pd} + E_{kd} = E_{pn} + E_{kn}$ $\qquad$ $E_{pd} = 0$

$\frac{1}{2}mv_d^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2$

$v_d^2 = 2gh + v_h^2$ $\qquad$ Dosadíme: $h = 2r$ (vozík vyjede o průměr zatáčky), $v_h = \sqrt{gr}$

$v_d^2 = 2g \cdot 2r + \left(\sqrt{gr}\right)^2 = 4gr + gr = 5gr$

$v_d = \sqrt{5gr} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 12}\ \text{m/s} = 24\,\text{m/s}$

Výška rozjezdu

Kinetickou energii v nejnižším místě zatáčky získal vozík z potenciální energie, kterou měl na počátku dráhy.

$E_{pp} + E_{kp} = E_{pn} + E_{kn}$ $\qquad$ $E_{kp} = 0$ (v nejvyšším místě vozík téměř stojí)

$mgh_0 = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2$

$2gh_0 = 2gh + v_h^2$ $\qquad$ Dosadíme: $h = 2r$ (vozík vyjede o průměr zatáčky), $v_h = \sqrt{gr}$

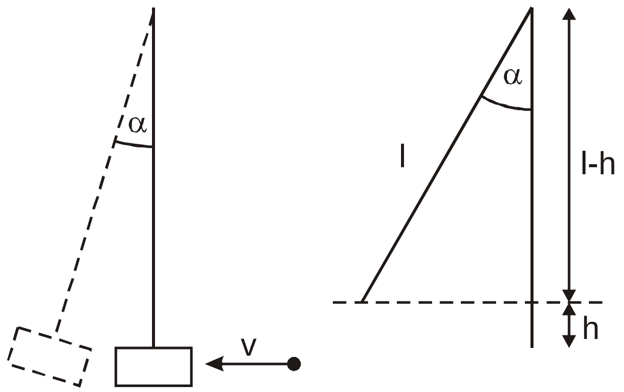
$2gh_0 = 2g \cdot 2r + \left(\sqrt{gr}\right)^2 = 4gr + gr = 5gr$

$h_0 = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 12\,\text{m} = 30\,\text{m}$

Př. 6: Balistické kyvadlo sloužilo k určování rychlosti, kterou palné zbraně vystřelovaly projektily (úsťová rychlost). Vystřelený náboj narazí a uvízne v závaží (například bedna s pískem), které je uvázáno na dlouhém závěsu. Závaží s uvíznutým projektilem se začne pohybovat a vychylovat z klidové polohy. Experimentátor změří maximální výchylku a výpočtem určí rychlost střely. Střela o hmotnosti 8 g, uvízla v kyvadle o hmotnosti 5 kg a vychýlila ho o $17°$ od svislého směru. Urči počáteční rychlost kulky, jestliže kyvadlo má délku 1 m.

$m_n = 8\,\text{g} = 0{,}008\,\text{kg}$, $m_k = 5\,\text{kg}$, $\alpha = 17°$, $l = 1\,\text{m}$, $v_n = ?$

Nejdříve určíme výšku, ze které do které kyvadlo vystoupalo.



Z obrázku vidíme, že platí:

$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = l - l\cos\alpha = l\left(1-\cos\alpha\right) = 1\left(1-\cos 17°\right)\text{m} = 0{,}044\,\text{m} \qquad (4{,}4\text{cm})$$

Pro pohyb kyvadla platí zákon zachování energie: $E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$

($E_{p1} = 0$, kyvadlo se pohybuje s klidové polohy, $E_{k2} = 0$ v nejvyšším místě se kyvadlo zastaví).

$$E_{k1} = E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgh$$

$$v^2 = 2gh \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}044}\,\text{m/s} = 0{,}93\,\text{m/s}$$

Během zachycení náboje v závaží neplatí zákon zachování energie (náboj i závaží se deformuje). Působení náboje a závaží je však čistě vzájemné $\Rightarrow$ zákon zachování hybnosti:

$$m_n v_n + m_z v_z = m_n w_n + m_z w_z.$$

Platí: $v_z = 0$ (závaží před srážkou s nábojem stojí), $w_n = w_z$ (náboj zůstane v závaží a pohybuje se s ním).

$$m_n v_n = \left(m_n + m_z\right) w$$

$$v_n = \frac{\left(m_n + m_z\right) w}{m_n} = \frac{\left(0{,}008 + 5\right) 0{,}93}{0{,}008}\,\text{m/s} = 586\,\text{m/s}$$

Náboj se po výstřelu pohyboval rychlostí 586 m/s.

Závěrečné poznámky k energii a práci

Pokud působí tření nebo jiná odporová síla, zákon zachování mechanické energie neplatí $\Rightarrow$ energie se přesto neztrácí, mění se pouze na nemechanické druhy (většinou tepelnou energii, vzduch, podložka, zdrát při ohýbání, všechno se zahřívá).

Energie a práce jsou dvě blízce svázané veličiny (stejná jednotka), přesto se zásadně liší:

- **Energie** charakterizuje **stav tělesa** (nezajímá nás, jak získal kamen rychlost, kdo ho zvednul, zajímá nás pouze aktuální rychlost nebo výška, ve které se nachází). Říká se, že **energie je stavová veličina**.
- Při výpočtu práce, jsme se vždy zajímali, jakým způsobem děj probíhal (jakou silou a na jaké dráze krabička na stole zabrzdila, jakou silou jsem natahoval pružinu). Práce tedy charakterizuje děj, při kterém nastane přeměna nebo přenos energie.

Práce ani energie nejsou měřitelné veličiny (jako třeba rychlost, hmotnost, síla nebo poloha). Proto je vyjadřujeme pomocí veličin přímo měřitelných. Z tohoto pohledu jsou energie i práce trochu „umělé“ abstrakce, pro nás však velice užitečné.

Na začátku to vypadalo jednoduše a jako všechno, čím víc o tom víme, tím víc se to komplikuje. Konec kapitoly přenecháme někomu daleko povolanějšímu. Dovolíme si citaci z legendární fyzikální literatury, z vysokoškolských přednášek amerického fyzika Richarda Feynmana.

Existuje skutečnost nebo chcete-li zákon, kterým se řídí všechny přírodní jevy. Pokud víme, tento zákon je přesný a neexistuje z něho žádná výjimka. Je to zákon zachování energie. Říká, že existuje veličina nazývaná energií, která se nemění v průběhu mnoha změn, jenž postupuje příroda. To je velmi abstraktní myšlenka, vždyť jde o matematický princip. Hovoří o existenci číselné veličiny, která se průběhu procesů nemění. Není to popis mechanismu, ani něčeho konkrétního, je to jen podivuhodná skutečnost, když spočítáme nějakou veličinu, pak pozorujme, jak příroda provádí své kousky, nakonec provedeme výpočet znovu a dostaneme totéž číslo. (Něco jako střelec na černém poli, který po určitém počtu kroků – které detailně neznáme – se stále nachází na černém poli. To je zákon této hry.) Protože jde o abstraktní myšlenku, ilustrujeme její smysl pomocí analogie.
Představme si dítě, například nějakého Cipíska, který má kostky. Všechny jsou nezničitelné a nedají se rozdělit na části, všechny jsou stejné. Předpokládejme, že Cipísek má 28 kostek. Maminka ho ráno nechá v pokoji se všemi 28 kostkami a každý večer je starostlivě počítá. Takto objeví fenomenální zákonitost, bez ohledu na to, co chlapec s kostkami přes den dělá, jich je každý večer 28. Takováto situace se opakuje několik dní, až jednou zůstane jen 27 kostek. Krátké hledání však ukáže, že jedna kostka je pod kobercem a že se počet kostek ve skutečnosti nezměnil. Jednou se však počet kostek změnil. Zůstalo jich jen 26. Pečlivý průzkum, který matka provedla, však ukázal, že bylo otevřené okno a tím se dostaly dvě kostky ven. Dalšího dne však matka napočítala 30 kostek, což vyvolalo značné překvapení. Potom si však maminka uvědomila, že Cipísek měl na návštěvě kamaráda, který si s sebou přinesl své kostky a několik jich u Cipíska zapomněl. Když matka vrátila přebytečné kostky, zavřela okno a nepustila na návštěvu kamarády, všechno bylo zase v pořádku. Až jednou při počítání zjistila, že zbylo jen 25 kostek. V pokoji byla krabice na hračky, a když se do ní matka chtěla podívat, chlapec jí to nechtěl dovolit a dal se do křiku. Matka však byla velmi zvědavá a dost vynalézavá. Věděla, že každá kostka váží 100 g, a tak zvážila krabici, když bylo všech 28 kostek venku. Zjistila, že váží 500g, a proto při další kontrole kostek zvážila opět krabici, odečetla 500 g, dělila stem. Zjistila zákonitost:

$$\begin{pmatrix} \textit{počet kostek} \\ \textit{venku} \end{pmatrix} + \frac{(\textit{hmotnost krabice}) - 500\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = \textit{konstanta}$$

Později se objevily nové odchylky, ale ukázalo se, že špinavá voda ve vaně změnila svoji hladinu. Dítě házelo kostky do vody a matka je tam nemohla vidět, protože voda byla špinavá. Přidáním dalšího členu do vzorce však zjistila, kolik kostek je ve vodě. Protože původní výška vody byla 15 cm a každá kostka zvedla hladinu o 0,5 cm, nový vzorec má tvar:

$$\begin{pmatrix} \textit{počet kostek} \\ \textit{venku} \end{pmatrix} + \frac{(\textit{hmotnost krabice}) - 500\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} + \frac{(\textit{výška vody}) - 15\,\mathrm{cm}}{0{,}5\,\mathrm{cm}} = \textit{konstanta}$$

Jak Cipísek rostl a pohyboval se po čím dál větší části světa, našla matka celou řadu členů odpovídajících počtu kostek nacházejících se na místech, do nichž nesměla nahlédnout. Tak našla komplexní vzorec pro veličinu, kterou je třeba vypočítat a která v podmínkách jejího světa zůstává stálá.

Čím je tento příklad podobný zákonu zachování energie? Musíme udělat jednu důležitou abstrakci, musíme si odmyslet kostky. Odstraníme-li první členy v předchozích vzorcích, zjistíme, že počítáme víceméně abstraktní věci. Podobnost spočívá především v tom, že

počítáme-li energii, dostáváme se do situace, že někdy část energie odchází ze systému a někdy zase do systému přichází. Abychom ověřili zákon zachování energie, musíme dávat pozor, aby nic nepřišlo ani neodešlo. Dále, energie má mnoho různých forem a pro každou máme zvláštní vzorec. Jsou to: gravitační energie, kinetická energie, tepelná energie, elastická energie, elektrická energie, chemická energie, radiační energie, jaderná energie, energie vázaná na hmotnost. Když sčítáme příspěvky jednotlivých energií, součet se nezmění, nebude-li nějaká energie dodána nebo odebrána.
Je důležité si uvědomit, že současná fyzika vlastně neví, co je energie. Nepředstavujme si, že by se energie vyskytovala v určitém počtu malých kapiček. Tak to není. Existují však vztahy pro výpočet určité číselné veličiny a při sčítání všech příspěvků dostáváme „28" – vždy stejné číslo. Je to abstraktní věc v tom smyslu, že nic neříká o mechanismu nebo příčinách jednotlivých vztahů.

Feynmanovy přednášky z fyziky I
kapitola 4, strany 50/51
nakladatelství Fragment 2000

Shrnutí: